1. Označimo sa x broj godina koje treba da prođu da bi otac bio dvostruko stariji od sina. Tada vrijedi

$$42 + x = 2\,(14 + x)\,,$$

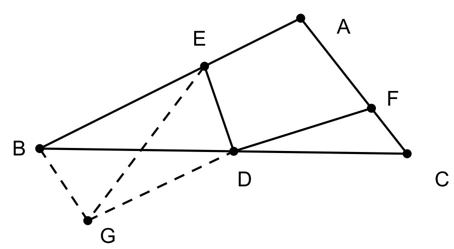
odakle je $x = 14$. Dakle, za 14 godina otac će imati 56 godina, a sin 28 godina i otac će biti dvostruko stariji od sina.

2. Imamo:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)} \\
&= \frac{(c-b)^3 + (a-c)^3 + (b-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)} \text{ (zbir kubova)} \\
&= \frac{(c-b+a-c)\left[(c-b)^2 - (c-b)(a-c) + (a-c)^2\right] + (b-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&= \frac{(a-b)(c^2 - 2bc + b^2 - ac + ab + c^2 - bc + a^2 - 2ac + c^2) + (b-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&= \frac{(a-b)(3c^2 + a^2 + b^2 - 3bc - 3ac + ab) - (a-b)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&= \frac{(a-b)(3c^2 + a^2 + b^2 - 3bc - 3ac + ab - a^2 + 2ab - b^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&= \frac{3c^2 - 3bc - 3ac + 3ab}{(b-c)(c-a)} = 3 \cdot \frac{c(c-a) - b(c-a)}{(b-c)(c-a)} = 3 \cdot \frac{(c-a)(c-b)}{(b-c)(c-a)} \\
&= -3.
\end{aligned}$$

Dakle, izraz A ima konstantnu vrijednost -3, koja ne zavisi od a, b i c.

3. Da bismo mogli usporediti brojeve $\overline{BE} + \overline{CF}$ i $\overline{EF}$, potrebno je konstruisati neke nove duži koje su podudarne dužima $\overline{BE}, \overline{CF}$ i $\overline{EF}$.



U tu svrhu produžimo $\overline{DF}$ preko F do tačke G tako da je $|\overline{GD}| = |\overline{DF}|$, pa kako je još $|\overline{ED}| = |\overline{ED}|$ i $\angle GDE = \angle FDE = 90°$, to su trouglovi DEG i FED podudarni. Odavde slijedi da je $|\overline{EG}| = |\overline{EF}|$. Primjećujemo da trougao BGE sadrži dvije stranice koje su podudarne s $\overline{BE}$ i $\overline{EF}$.

Pokažimo sada da vrijedi $|\overline{FC}| = |\overline{BG}|$. Imamo da je $|\overline{BD}| = |\overline{CD}|$, $|\overline{DG}| = |\overline{DF}|$ i $\angle GDB = \angle FDC$ (unakrsni uglovi), pa vrijedi da su trouglovi DBG i DCF podudarni. Iz te podudarnosti slijedi da je $|\overline{BG}| = |\overline{FC}|$.

Na kraju zaključujemo da je $|\overline{EF}| = |\overline{EG} < |\overline{BE}| + |\overline{BG}| = |\overline{BE}| + |\overline{CF}|$.

4. a) Razlomak $\frac{a}{b}$ se može kratiti nekim brojem ako i samo ako taj broj dijeli $\text{nzd}(a, b)$. Zbog toga odredimo $\text{nzd}(a, b)$.

Neka je $d = \text{nzd}(a, b)$. Tada je $a = du$ i $b = dv$, pri čemu su u i v relativno prosti prirodni brojevi. Kako je $2a - 7b = 1$, to je

$$1 = 2du - 7dv = d(2u - 7v).$$

Odavde slijedi, kako d dijeli desnu stranu da mora dijeliti i lijevu stranu, da $d \mid 1$, pa je $\text{nzd}(a, b) = 1$. To znači da se razlomak može kratiti samo sa prirodnim brojem 1.

b) Imamo

$$a+b-7 = 2^n \cdot 7^{n+1} + 11 + 2^{n+1} \cdot 7^n + 3 - 7 = 2^n \cdot 7^n (7+2) + 7 = 9 \cdot 2^n \cdot 7^n + 7.$$

Ako je $n = 1$, onda je $a + b - 7 = 7 \cdot 19$. Broj $7 \cdot 19$ nije potpun kvadrat.

Pretpostavimo da postoji prirodan broj $n \geq 2$ takav da je broj $a+b-7$ kvadrat nekog prirodnog broja, recimo broja k. Broj 2^n za $n \geq 2$ je djeljiv sa 4, pa broj $9 \cdot 2^n \cdot 7^n$ možemo napisati u obliku $4 \cdot m$, gdje je $m = 9 \cdot 2^{n-2} \cdot 7^n$. Tada je $k^2 = a + b - 7 = 4m + 7$. Ovo je neparan broj, pa je i k^2 neparan broj, a samim tim je i k neparan broj. Neka je $k = 2t + 1$. Tada imamo $4m + 7 = 4t^2 + 4t + 1$, tj. $4m + 6 = 4t(t + 1)$. Dakle, $2m - 2t(t + 1) = -3$. Ovo je nemoguće, jer je razlika bilo koja dva parna prirodna broja paran broj, a u našem slučaju ta razlika je neparan broj 3. Pretpostavka da postoji prirodan broj $n \geq 2$ takav da je $a+b-7$ kvadrat nekog prirodnog broja dovela nas je do kontradikcije, pa nije tačna.

5. Pretpostavimo da tvrdnja nije tačna, tj. da postoje disjunktni podskupovi A i B skupa X takvi da je $X = A \cup B$ i nijedan od skupova A i B ne sadrži tri elementa takva da je suma dva od njih jednaka dvostrukom trećem.

   Broj 5 je u jednom od skupova A i B. Neka je npr. u A. Pretpostavimo da je broj 3 također u A. Kako je $5 + 3 = 8$, to 4 nije u A. Iz $5 + 1 = 6$ slijedi da 1 nije u A. Iz $3 + 7 = 10$ slijedi da 7 nije u A. Dakle, brojevi 4, 1 i 7 pripadaju skupu B. No, 1+7=8 povlači da brojevi 1, 4 i 7 nisu u B. Dobili smo kontradikciju. Dakle, $3 \notin A$, tj. $3 \in B$.

   Na isti način zaključujemo da 7 nije u A, već je u B.

   Ako bi brojevi 4 i 6 bili u A, onda bismo imali 4+6=10, to znači da 4,5,6 ne mogu sva tri biti u A. Zato je bar jedan od brojeva 4 ili 6 u B. Neka je npr. $4 \in B$. Tada je $1 \in A$, jer bi u protivnom za elemente $1, 4, 7 \in B$ vrijedilo $1 + 7 = 8 = 2 \cdot 4$, što je suprotno pretpostavci da ni jedan od skupova A i B nema tu osobinu. Kada bi 2 bilo u B imali bismo 2+4=6, to povlači da bar jedan od brojeva 2, 3 i 4 nije u B. Dakle, 2 nije u B, pa je u A. Kako je $2 + 8 = 10$, to 8 nije u A, pa je 8 u B. Iz $8 + 4 = 12$ slijedi da je $6 \in A$. Iz $9 + 1 = 10$ slijedi da je 9 u B. Dobili smo 7, 8 i 9 u B što je nemoguće jer je $7 + 9 = 16$.

   Pretpostavka da je $4 \in B$ dovela nas je do kontradikcije, pa nije tačna. Na isti način se pokazuje da podatak $6 \in B$ vodi do kontradikcije. Dakle, brojevi 4 i 6 nisu u B, pa su u A. No, tada opet imamo kontradikciju jer je $4 + 6 = 10$. Dakle, pretpostavka da tvrdnja nije tačna dovela nas je do kontradikcije, pa zaključujemo da pretpostavka nije tačna.